La rappr. aggiunta non può avere più di quattro pesi.

Questo è in contrasto con il fatto che una rappresentazione di $SU(2)$ di dimensione molto grande può avere una stringa di pesi arbitrariamente lunga.

Se così non fosse ci sarebbero stringhe di pesi, che sono combinazioni lineari di radici, di 5 o più elementi. Cioè ci sarebbero 5 o + radici: $\beta-2\alpha, \beta-\alpha, \beta, \beta+\alpha, \beta+2\alpha$ in una sequenza di passo α in β.

In questo si risulta che i pesi dell'aggiunta sono in numero pari al numero di radici di L. Cioè la dimensione dello spazio su cui agisce l'aggiunta è la stessa di L e c'è una radice per ogni vettore di base di questo spazio.

DIMOSTRAZIONE DELLA CONTRADDIZIONE

2α non può essere una radice se α è una radice

ma $2\alpha = (\beta+2\alpha)-\beta \notin \Sigma$

Ugualmente $2(\beta+\alpha)$ non è una radice $2(\beta+\alpha) = (\beta+2\alpha)+\beta \notin \Sigma$

quindi $(\beta+2\alpha)$ non può essere aumentato o diminuito di β

ovvero è una stringa di un solo elemento per cui

$$(m-p)_\beta = 0 = \frac{\langle \beta+2\alpha | \beta \rangle}{\langle \beta | \beta \rangle} \Rightarrow \langle \beta+2\alpha, \beta \rangle = 0$$

Similmente

$$-2\alpha \notin \Sigma \qquad -2\alpha = (\beta-2\alpha)-\beta \notin \Sigma$$

$$2(\beta-\alpha) \notin \Sigma \Rightarrow (\beta-2\alpha)+\beta \notin \Sigma$$

quindi $\langle \beta-2\alpha | \beta \rangle = 0$

quando segue $\beta = 0$

La costruzione usa $\alpha, -\alpha, \beta+\alpha, \beta-\alpha$ cioè 3 radici $\{\alpha, \beta+\alpha \text{ e } \beta-\alpha\}$. Si può ancora avere una quarta che deve essere a scelta tra $\beta-2\alpha$ o $\beta+2\alpha$ ma se le prendo tutte e due allora è per forza $\beta=0$

Da questo segue l'importante restrizione che

$(m-p)$ può essere solo $\pm 3, \pm 1$ se ho tutte e 4
$\pm 2 \quad 0$ se ne ho 3

Da questo possiamo ricavare una proprietà importante

$$\frac{\langle\beta|\alpha\rangle}{\langle\alpha|\alpha\rangle} = \frac{\overbrace{(m-p)}^{\tau \text{ intero}}}{2} \qquad \frac{\langle\alpha|\beta\rangle}{\langle\beta\beta\rangle} = \frac{1}{2}\overbrace{(m'-p')}^{q \text{ intero}}$$

$\otimes$

è il prodotto di due semi-interi S_1 S_2

$$\frac{\langle\alpha\beta\rangle\langle\beta\alpha\rangle}{\langle\alpha\alpha\rangle\langle\beta\beta\rangle} = S_1 \cdot S_2 = \frac{1}{4}\tau \cdot q \qquad 2\tau\, 2q \in \mathbb{Z}$$

Se $\langle\ \rangle$ è un prodotto scalare (lo dimostro tra poco) posso dire che il membro sinistro è $\cos^2\theta_{\alpha\beta}$

$$\cos^2\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\{0,1,2,3\}^2 = \{0,1,2,3,6,9\}\frac{1}{4}$$

e in realtà sono possibili solo $\cos^2\theta = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$

($\frac{6}{4} > 1$ $\frac{9}{4} > 1$ non sono un valore ammissibile di $\cos^2 x$)

cioè i vettori radice sono spaziati di angoli ben precisi "quantizzati in $\frac{1}{4}$".

Questa affermazione è molto potente, perché significa che posso mettere le radici solo in certe maniere e non in modo generico.

CONSEGUENZA FUNDAMENTALE $\Rightarrow$ SARÀ POSSIBILE FARE UN CATALOGO DI ALGEBRE POSSIBILI!

$\langle \; \rangle$ È UN PRODOTTO SCALARE

Per mostrare che $\langle \; \rangle$ sulle radice è un Prodotto Scalare è sufficiente fare vedere che $\forall \alpha \in \Sigma$ si può esprimere come combinazione lineare reale di radici di base.

In realtà viene fuori che le radici sono combinazioni reali razionali

$$\alpha = \sum_{\beta_i \in \Sigma} z_i \beta_i \qquad z_i \in \mathbb{Z}$$

DIMOSTRAZIONE

Ipotizzo $\{\alpha_1 \dots \alpha_n\}$ è una base

$$\beta = \sum q_i \alpha_i$$

$$2\underbrace{\frac{\langle \beta, \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j \alpha_j \rangle}}_{(m-p)\,\in\,\mathbb{Q}\ (\text{interi})} = \sum_i q_i \, 2\underbrace{\frac{\langle \alpha_i \alpha_j \rangle}{\langle \alpha_j \alpha_j \rangle}}_{(m-p)\,\in\,\mathbb{Q}\ (\text{interi})}$$

quindi le q_i che risolvono questo sistema di equazioni devono essere RAZIONALI $q_i \in \mathbb{Z}$

Segue che le combinazioni sono razionali posso concludere che qualunque prodotto scalare $\langle \omega \, \gamma \rangle$

dove $\omega = \sum_i z_i \alpha_i$ $\quad \gamma = \sum_i g_i \alpha_i$ con $g_i, z_i \in \mathbb{Z}$

è $\langle \omega \, \gamma \rangle = \sum_{ij} \underbrace{g_i z_j}_{\in \mathbb{Z}} \overbrace{(h_{\alpha_i} h_{\alpha_j})}^{\in \mathbb{R}}$ quindi è un numero reale

Insomma questo elimina la possibilità di dover guardare a combinazioni complesse per cui $\langle \ \rangle$ sarebbe $\mathbb{C}$

Interessante anche notare che

$$\langle \alpha \beta \rangle \in \mathbb{Z} \quad \text{se } \alpha, \beta \in \Sigma$$

Ricordiamo che $\mathrm{Ad}\, h$ ha una rappresentazione matriciale $M = \mathrm{diag}\{ \mathrm{Tr}([h, e_\alpha]\, e_\alpha)\}$

$$\mathrm{Ad}\, h = \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \alpha_1(h) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n(h) \end{pmatrix} \quad \forall\, h \in H$$

da cui segue che

$$\langle \beta \beta \rangle = (h_\beta\, h_\beta) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}\, h_\beta\, \mathrm{Ad}\, h_\beta)$$

$$= \sum_{\alpha \in \Sigma} \alpha^2(h_\beta) = \sum_{\alpha \in \Sigma} (h_\beta\, h_\alpha)^2 = \sum_{\alpha \in \Sigma} \langle \alpha \beta \rangle^2$$

$\Rightarrow \langle \beta \beta \rangle \geq 0$ essendo somma di quadrati $\mathbb{R}$

Inoltre se α è una stringa di passo β $\alpha, \alpha+\beta, \alpha-\beta$

deve valere $\langle \alpha \beta \rangle = \langle \beta \beta \rangle \frac{1}{2} (m-p)_\alpha$

$$\cancel{\langle \beta \beta \rangle} = \sum_{\alpha \in \Sigma} \cancel{\langle \beta \beta \rangle^2} \left(\frac{(m-p)}{2} \right)^2_\alpha$$

da cui segue

$$\frac{1}{\langle \beta\beta \rangle} = \sum_{\alpha \in \Sigma} \frac{(m-p)^2_\alpha}{4}$$

$$\langle \beta\beta \rangle = \left(\sum_{\alpha \in \Sigma} \frac{1}{4} (m-p)^2 \right)^{-1} \quad \cancel{\in \mathbb{Z}}$$

$\langle \beta\beta \rangle$ è razionale

$\Rightarrow \langle \alpha \beta \rangle = \frac{(m-p)}{2} \langle \beta \beta \rangle$ è pure lui razionale

Riassumendo:

$$\beta = \sum q_i \alpha_i \qquad q_i \in \mathbb{Z}$$

$$\langle \alpha | \beta \rangle, \langle \beta, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$$